

因果構造と統計的因果推論に 関する圏論的モデル

京都産業大学 理学研究科数学専攻

佐原 悠太

発表の流れ

1. 概要
2. 統計的因果推論
3. 圏の定義
4. B.Jacobsらの研究
5. A.Kissingerらの研究
6. 主結果
7. 展望

概要

- 統計的因果推論に関する一般化を目標とした研究の一部
- Kissingerらによる因果構造を圏で記述した先行研究とJacobsらによる統計的因果推論の推論に関するグラフの操作に対応する圏上での操作に関する先行研究の比較、検討を行った。
- 主な結果としては、
ベイジアンネットワーク上で等しく計算できるような新たなSyntaxの圏を構成し、それぞれの意味での因果と操作を対応付けた。

統計的因果推論

- 相関と因果が違う

データから相関関係を調べても、それが原因であるとは限らない。

- 介入

原因を特定するために恣意的な調整を行う。特定の変数に対して値を固定することで、他の変数に応じて自然に変化するという性質をなくす操作と言える。

- 因果ダイアグラム

Rubinの潜在反応モデルに基づく因果推論に対し、Pearlは構造方程式モデル、グラフィカルモデルに基づく因果推論を展開した。

例

例：収入と結婚、火事と消防士の数、Simpsonのパラドックスなど

アイスクリームと暴力犯罪

$$V = \{X, Y, Z\}, \quad U = \{U_X, U_Y, U_Z\}, \quad E = \{f_X, f_Y, f_Z\}$$

$$f_X : X = U_X$$

$$f_Y : Y = 4X + U_Y$$

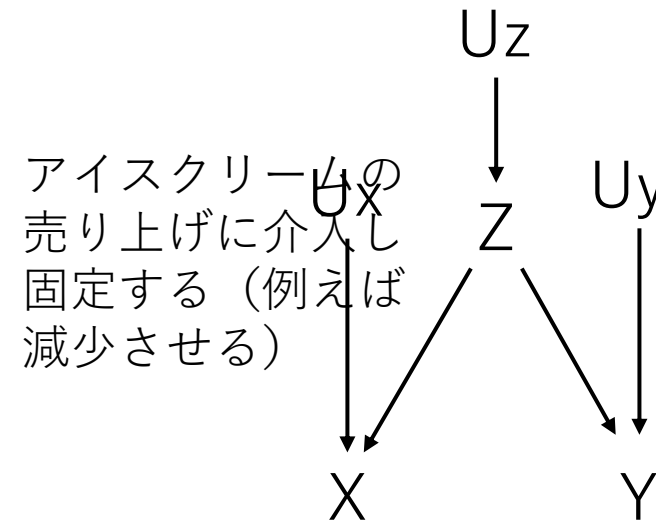
$$f_Z : Z = \frac{X}{10} + U_Z$$

X:アイスクリームの売り上げ

Y:暴力犯罪の件数

Z:気温

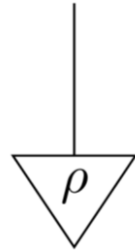
因果ダイアグラム



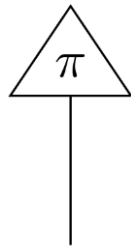
Category

基本になる圏はSMC(Symmetric Monoidal Category)とストリング図

• state: $I \rightarrow X$



• effect: $X \rightarrow I$



• number: $I \rightarrow I$

λ

CDU-category

CDU-categoryはSMCであり、コモノイダル構造として、copy/del/uniformが含まれている

$$\text{copy}_X : X \rightarrow X \otimes X$$

$$\text{del}_X : X \rightarrow I$$

$$\text{uniform}_X : I \rightarrow X$$

$$\text{copy}_X = \text{diagram of copy}$$

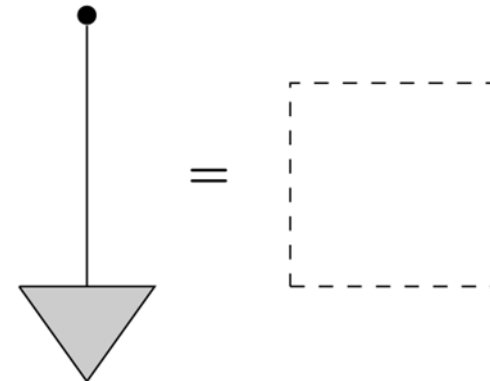
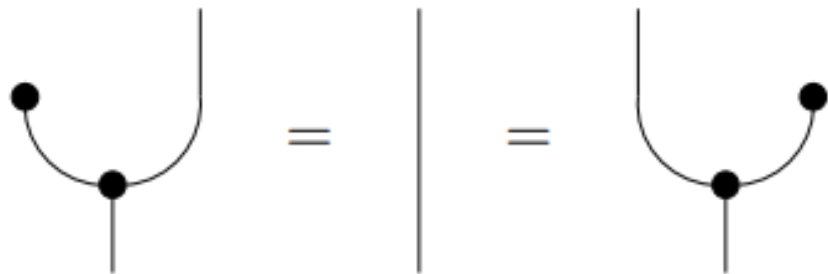
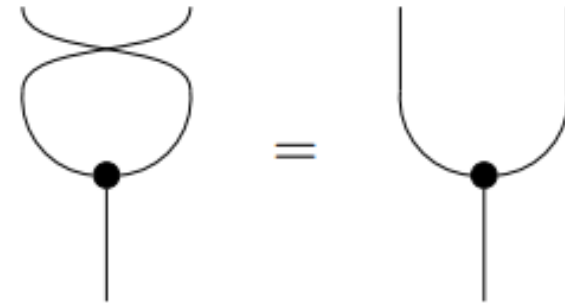
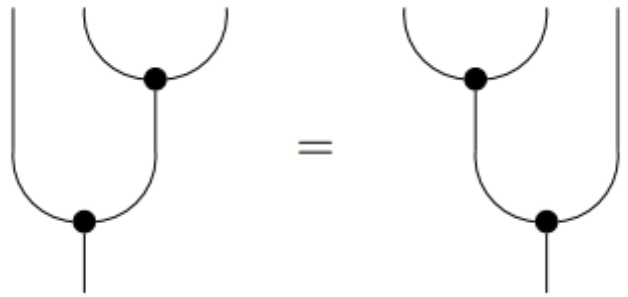
$$\text{del}_X = \text{diagram of del}$$

$$\text{Uniform state}_X = \text{diagram of uniform state}$$

(もし、copy、delのみであればCD-categoryまたはgs-monoidal category)

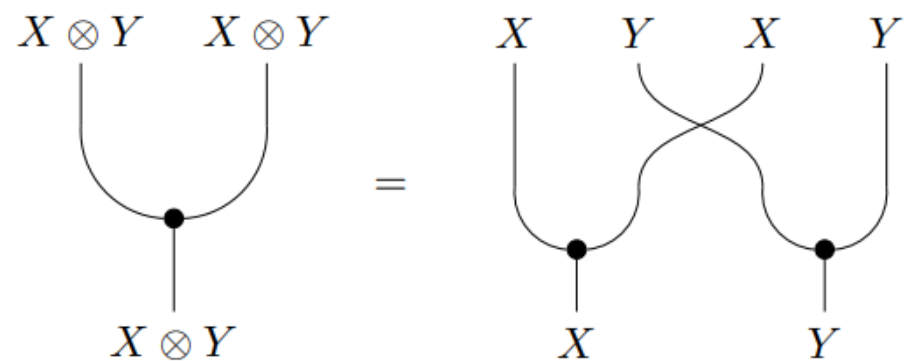
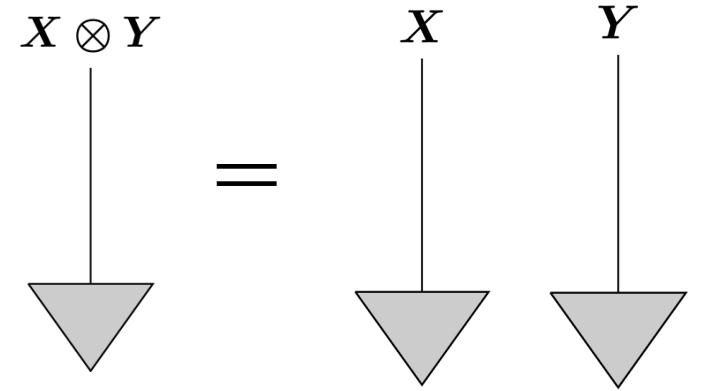
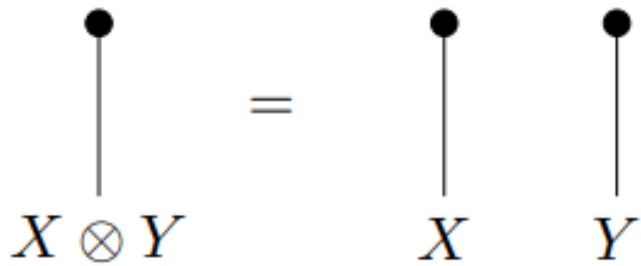
CDU-category

commutative comonoid equations



CDU-category

compatibility with the monoidal structure



Compact Closed Category

Compact closed categoryとは、SMCであり、任意の対象Aについて双対オブジェクト A^* が存在し、

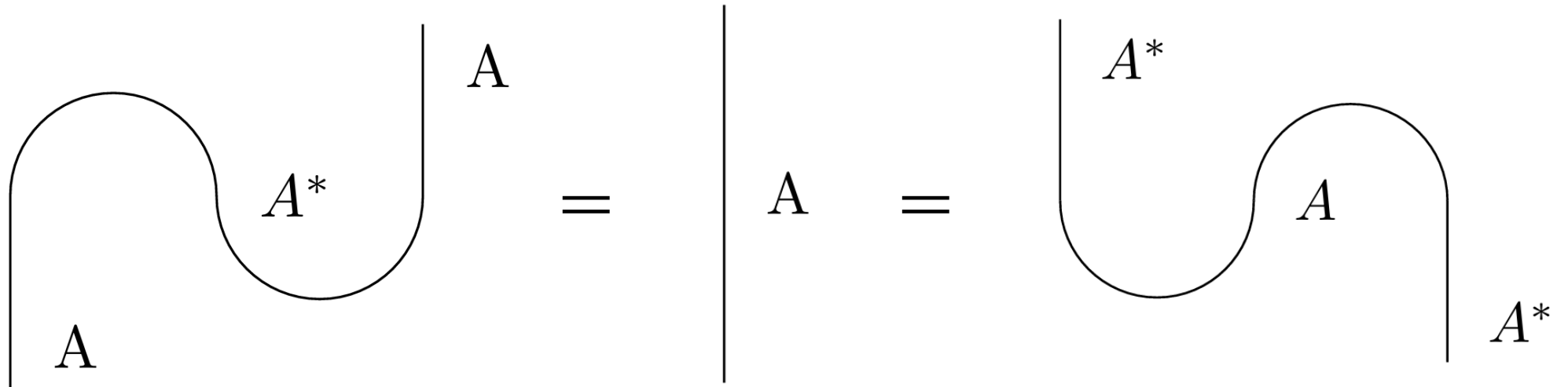
$$\text{Cup } \eta_A: I \rightarrow A^* \otimes A$$

$$\text{Cap } \varepsilon_A: A \otimes A^* \rightarrow I$$

について、以下を満たす。

$$(\varepsilon_A \otimes 1_A) \circ (1_A \otimes \eta_A) = 1_A$$

$$(1_{A^*} \otimes \varepsilon_A) \circ (\eta_A \otimes 1_{A^*}) = 1_{A^*}$$



FinStoch, $\text{Mat}(\mathbb{R}_+)$

- FinStoch

対象を有限集合、射を確率行列とし、離散確率のモデルとなる圏
CD/CDU-categoryである。

- $\text{Mat}(\mathbb{R}_+)$

対象を有限集合、射をその間の行列とする圏
このとき、行列の要素は \mathbb{R}^+ の値を取る。
Compact closed categoryである。

$\text{FinStoch} \hookrightarrow \text{Mat}(\mathbb{R}_+)$ が存在し、埋め込むことでFinStochの射
である確率行列を $\text{Mat}(\mathbb{R}_+)$ の射として見ることが出来る

Kissingerらの研究

- Compact closed category上にストリング図を用いて、因果構造を表現している。
- Causal orderを定義することで、巡回を含まないダイアグラムを表現することができ、これがDAGと対応する。
- Causal orderによって、causal processを定義している。

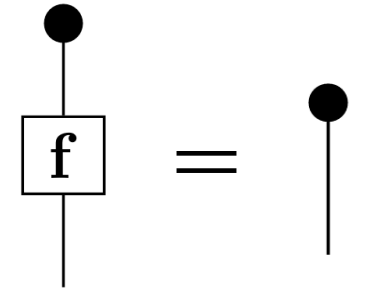


- Causal orderのsecond-order readingはCaus[C]を生成し、これは*-autonomous categoryとなる。

Kissingerによる因果構造

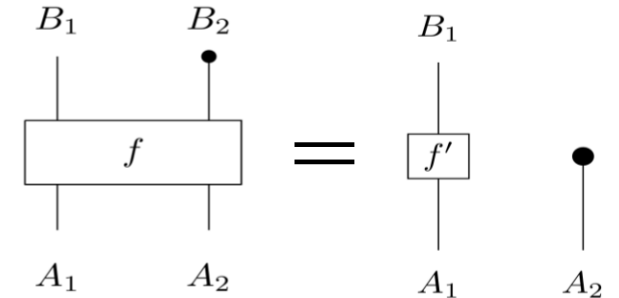
- causal

$f: X \rightarrow Y$ がcausalであるとは、del mapとの合成について左の図を満たす。



- causal order

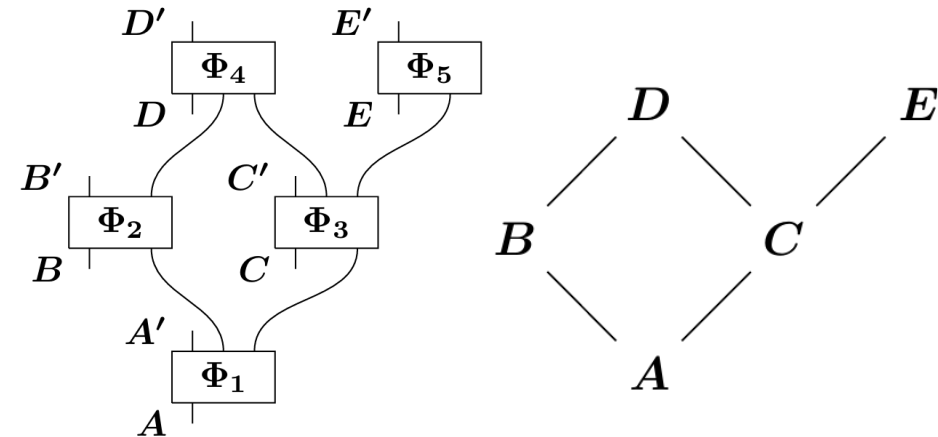
$\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ と書かれ、 $\mathbf{A} := (A_1, A_2)$ 、 $\mathbf{B} := (B_1, B_2)$ 、 $f: A_1 \otimes B_1 \rightarrow A_2 \otimes B_2$



が定まっているとき、左の図を満たす。

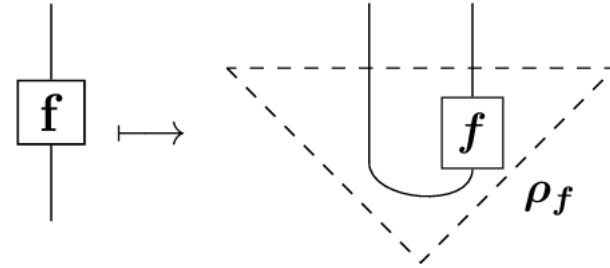
- causal process

causal processは左のように合成することができ、causal orderによって、DAGと対応する。

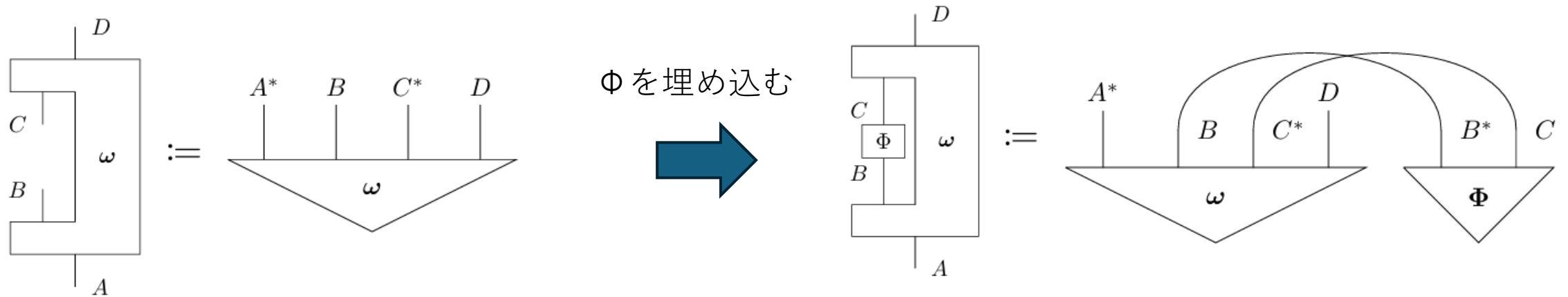


Second order reading

compact closed category上で議論しているので
cap、cupを用いて、



このように、出力と入力のdual objectとのモノイダル積へのstateとして、読み替えることができる。
またcombの記法によって、



Jacobsらの研究

- Surgery

はじめにSyntaxの圏を定義する

$$\text{dag } G = (V_G, E_G)$$

$$\Sigma_G = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} A \\ \text{---} B_1 \cdots B_k \end{array} \end{array} \middle| A \in V_G \text{ with parents } B_1, \dots, B_k \in V_G \right\}$$

とおいて $\text{Syn}_G := \text{FreeCDU}(V_G, \Sigma_G)$ と定義する。このとき、

$\text{CDU functors } \text{Syn}_G \rightarrow \text{Stoch}$ はベイジアンネットワークの圏 BN_G を生成する

ここで、ベイジアンネットワークとはDAGにマルコフ連鎖が成り立つものである。

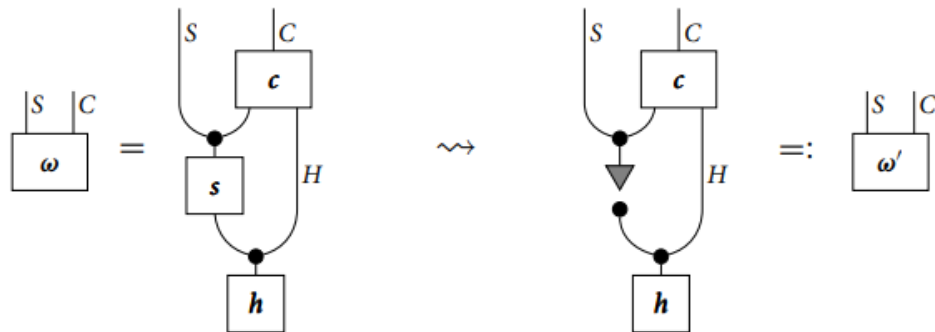
CDU-category 上での因果推論

- Surgery

Definition 5. For a fixed node $A \in V_G$ in a graph G , let $\text{cut}_A: \text{Syn}_G \rightarrow \text{Syn}_G$ be the CDU functor freely obtained by the following action on the generators (V_G, Σ_G) of Syn_G :

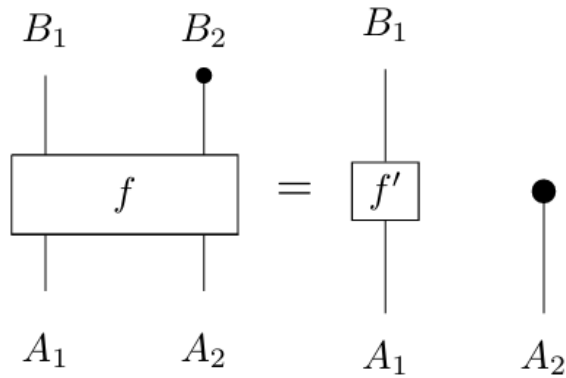
- For each object $B \in V_G$, $\text{cut}_A(B) = B$.

- $\text{cut}_A\left(\begin{array}{c} |^A \\ \boxed{a} \\ |_{B_1 \dots B_k} \end{array}\right) = \begin{array}{c} \downarrow^A \\ \bullet \quad \bullet \\ |_{B_1 \dots B_k} \end{array}$ and $\text{cut}_A\left(\begin{array}{c} |^B \\ \boxed{b} \\ |_{C_1 \dots C_j} \end{array}\right) = \begin{array}{c} |^B \\ \boxed{b} \\ |_{C_1 \dots C_j} \end{array}$ for any other $\begin{array}{c} |^B \\ \boxed{b} \\ |_{C_1 \dots C_j} \end{array} \in \Sigma_G$.



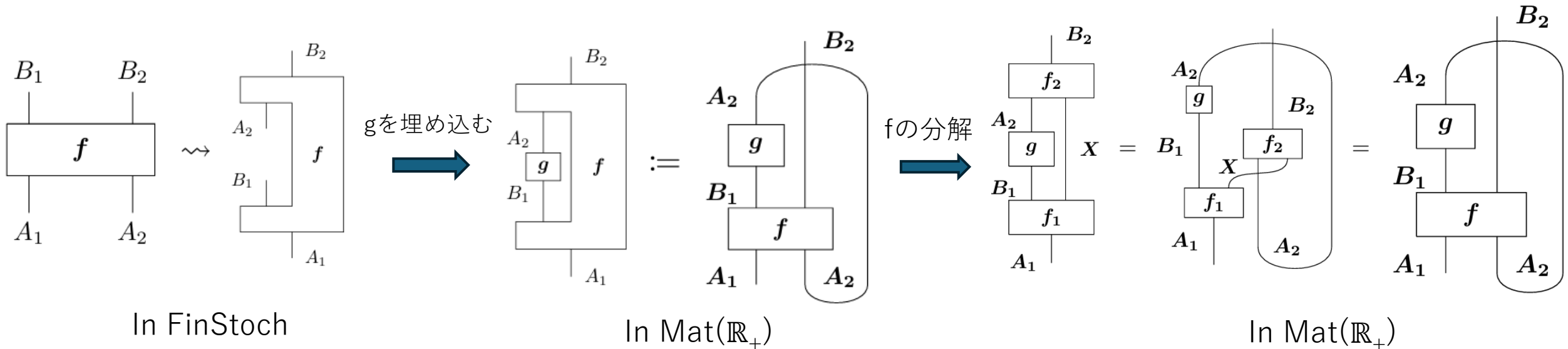
cutの操作によって因果ダイアグラムのsurgeryを行う
これがintervention(介入)の操作に対応する

2-comb in FinStoch

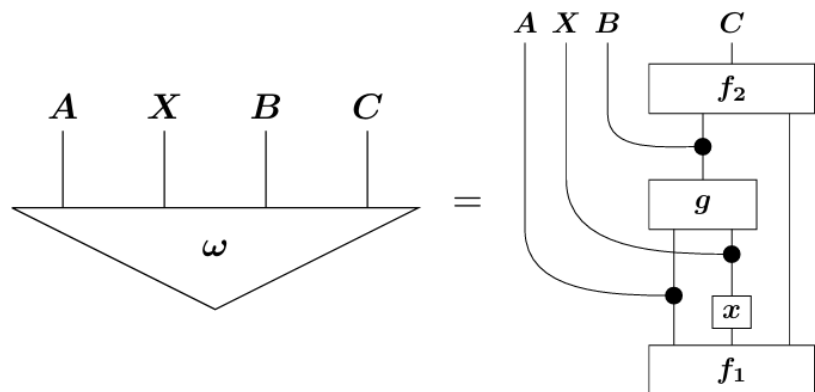


右の図が成り立つとき、 f はFinStochで2-combである。ただし、 $\mathbf{A} := (A_1, A_2)$ 、 $\mathbf{B} := (B_1, B_2)$ 、 $f : A_1 \otimes B_1 \rightarrow A_2 \otimes B_2$ のデータがなければならない。

これはモノイダル積の分解が一般的には不可能であるため。

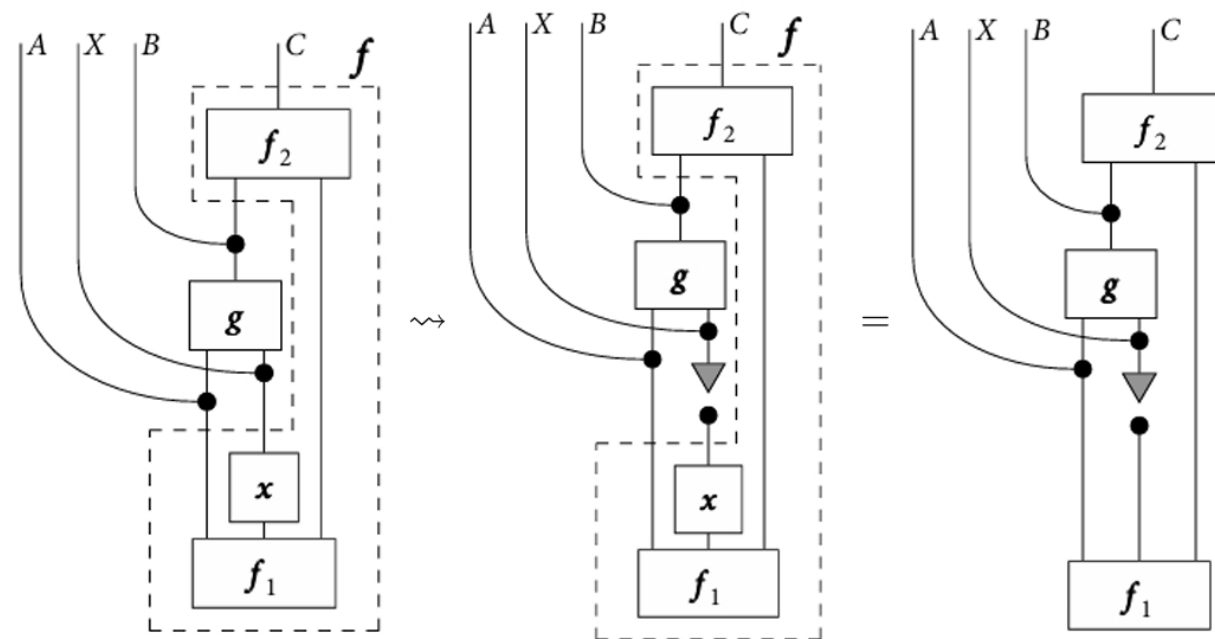


介入

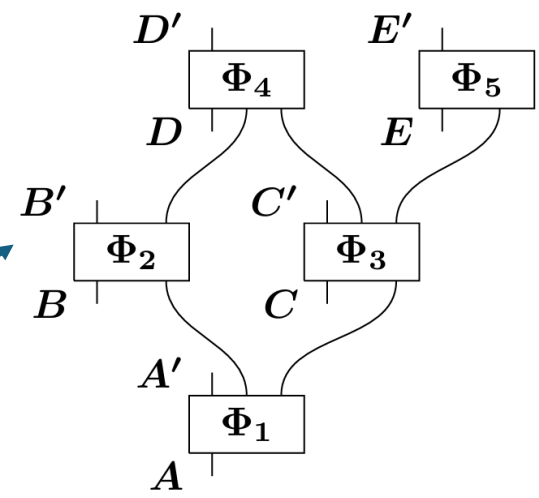
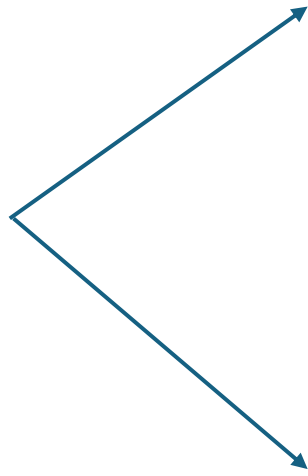
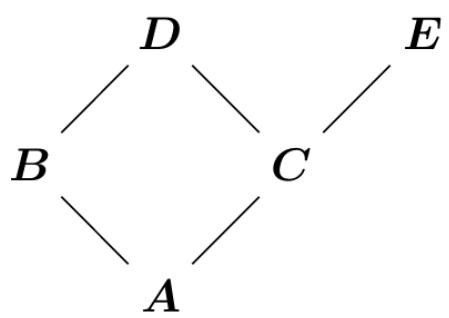


右の図で定まるstate $\omega: I \rightarrow A \otimes X \otimes B \otimes C$ に対して

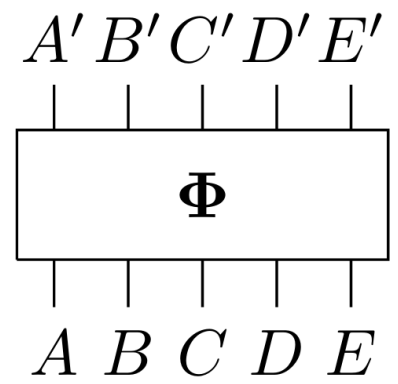
X の値に対して介入を施し、調整すると左の図のようになる。



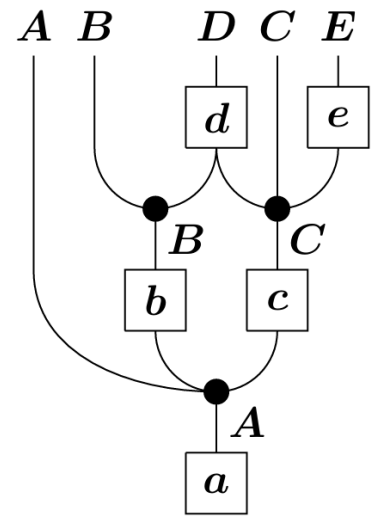
2つの先行研究



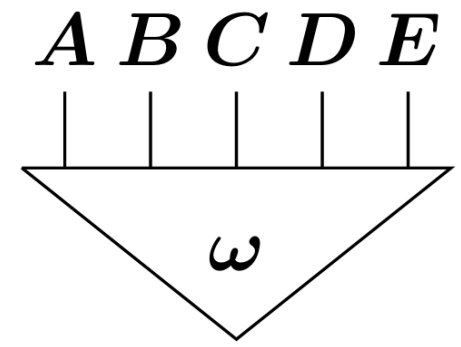
=



|| ?



=



主定理

G を DAG とする。G から適切なデータにより FinStoch の射 f_v を作る。これは Bayesian network の射に対応する。

Definition(CCSyn)

圏 CCSyn を copy map とそのモノイダル積に関する公理を含めた precausal category とする。

Proof.

ここで、適切なデータとは Kissinger らの研究の意味での因果構造である。causal order によって、G から適切に自由構成された圏 CCSyn の射が存在するとき、それは Kissinger らによる研究の意味での causal process を表現している。

そして、この方法によって生成された射を $F': \text{CCSyn} \rightarrow \text{Mat}(\mathbb{R}_+)$ によって移したものは、Jacobs らの研究での DAG G から構成される FinStoch の射 f_v と等しい。

これは、FinStoch の射を包含関手 $\iota: \text{FinStoch} \rightarrow \text{Mat}(\mathbb{R}_+)$ によって、 f_v を $\text{Mat}(\mathbb{R}_+)$ に包含された FinStoch の射として見ることで、 $\text{Mat}(\mathbb{R}_+)$ 上での同型を考えている。

なお、process に対応する CCSyn の射を F' で移し、 $\text{Mat}(\mathbb{R}_+)$ 上に構成する際、process の入力オブジェクトは state を用いて定義する。

主定理

このとき、例えば $\Phi : A \otimes B \otimes C \otimes D \otimes E \rightarrow A' \otimes B' \otimes C' \otimes D' \otimes E'$ を F' で移すと、

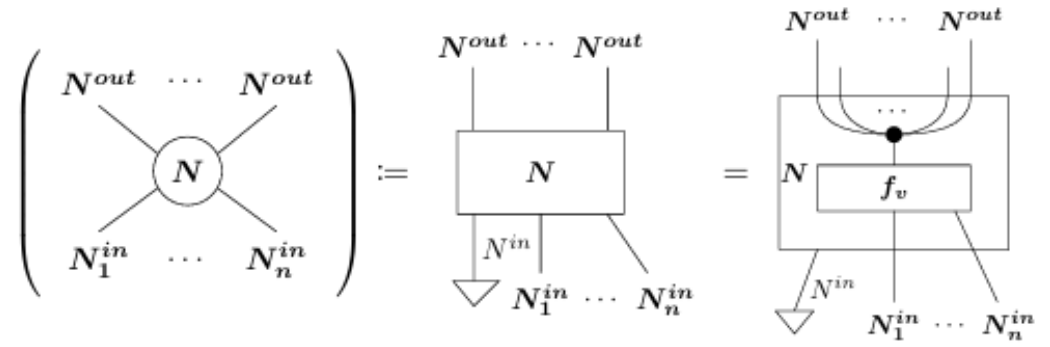
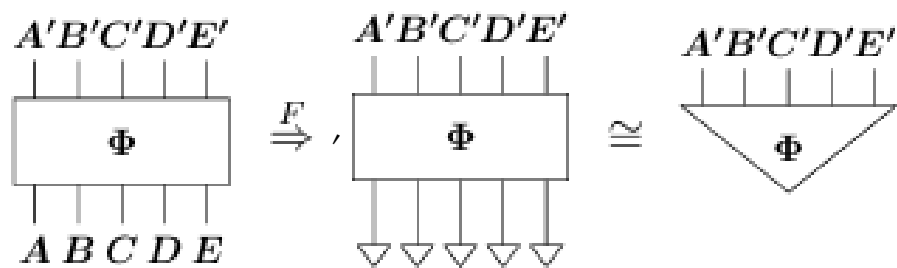
$$\cong F'(I \otimes I \otimes I \otimes I \otimes I) \rightarrow F'(A' \otimes B' \otimes C' \otimes D' \otimes E')$$

$$\cong F'(I) \otimes F'(I) \otimes F'(I) \otimes F'(I) \otimes F'(I) \rightarrow F'(A') \otimes F'(B') \otimes F'(C') \otimes F'(D') \otimes F'(E')$$

$$\cong I \otimes I \otimes I \otimes I \otimes I \rightarrow A' \otimes B' \otimes C' \otimes D' \otimes E'$$

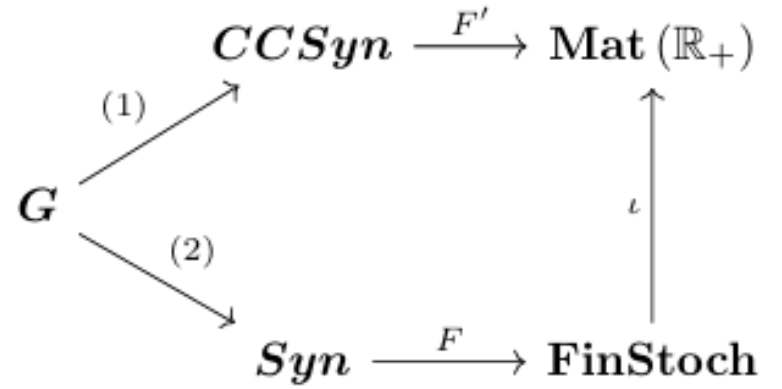
$$\cong I \rightarrow A' \otimes B' \otimes C' \otimes D' \otimes E'$$

であり、string diagram は左の図のように変形され、射については右の図のように定義する。



ここで G は DAG を対象とし、順序保存写像を射とする圏である。

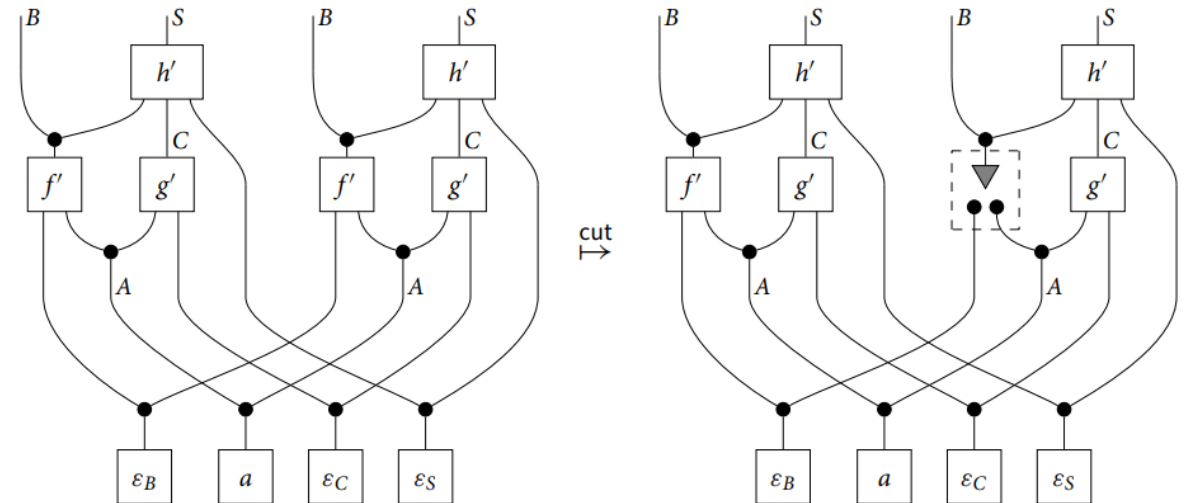
また右の図の(1)は causal order に基づいて構成し、(2)は Jacobs らの研究の Syn_G と同様に構成する。このとき、 $Mat(\mathbb{R}_+)$ 上で二つの方法により構成した string diagram は等しくなる。



Remark

cut functorは関手で定義されているが、
Jacobsらの研究では関手として成り立っていない
特に反事実の推論に関して、全てのcutする対象ではなく、
一部の対象に対し操作している。

- モノイダル積を2つ入れる
- 1つは通常モノイダル積
- もう1つは非可換なモノイダル積
- Cutは非可換なモノイダル積について行う。



展望

- Cut functor
非可換なモノイダル積
- 連続化によるUniform stateの定義
ディラック測度、傾向スコア、exact condition、
カーネル多変量解析
- $*$ -autonomous categoryに基づく線形論理での定式化
copyをモーダルオペレーター！で表現
- 機械学習への応用

References

1. Aleks Kissinger, and Sander Uijlen. 2019. A Categorical Semantics For Causal Structure. Logical Methods in Computer Science Volume 15, Issue 3, 2019, pp. 15:1–15:48.
<https://lmcs.episciences.org/>
2. Aleks Kissinger, Matty Hoban, and Bob Coecke. 2017. Equivalence of relativistic causal structure and process terminality. arXiv:1708.04118
3. Bart Jacobs, Aleks Kissinger, and Fabio Zanasi. Causal inference via string diagram surgery. Math. Structures Comput. Sci., 31(5):553–574, 2021.
4. Fritz, T. A synthetic approach to Markov kernels, conditional independence, and theorems on sufficient statistics. Advances in Mathematics 370 107239, 2020.
5. Judea Pearl, Madelyn Glymour, and Nicholas P Jewell. 2016. Causal inference in statistics a primer. Wiley & Sons Ltd. 落海浩 (訳) . 入門 統計的因果推論. 朝倉書店. 2019, 183 pages.
6. K. Cho and B. Jacobs, Disintegration and Bayesian inversion via string diagrams. Math. Struct. Comput. Sci., vol. 29, pp. 938–971, 2019.